

---

# **Rechnungsgrundlagen für die Pensionsversicherung mit variablem Pensionsantrittsalter**

**Franz G. Liebmann**

---

In der Arbeit wird eine Ausscheideordnung mit Alterspensionierungswahrscheinlichkeiten vorgestellt. Zur Berücksichtigung der dabei auftretenden hohen Übergangswahrscheinlichkeiten wird die Ausscheideordnung mit Hilfe des zugeordneten Differentialgleichungssystems berechnet. Die deutlichen Auswirkungen auf die anderen Übergangswahrscheinlichkeiten können damit quantifiziert werden.

Stichworte: Pensionsversicherung, Rechnungsgrundlagen, Ausscheideordnungen mit mehreren Ausscheideursachen, Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven und Invalidisierungswahrscheinlichkeiten im Bereich der Pensionsantrittsalter

## Übergang in die Alterspension

Fast alle bisher verwendeten Rechnungsgrundlagen für die Pensionsversicherung bauen auf Ausscheideordnungen auf, bei denen zusätzlich zu den Sterbewahrscheinlichkeiten noch die Invalidisierungs- bzw. Berufsunfähigkeitswahrscheinlichkeiten und allenfalls auch Fluktuationswahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden. Für den Übergang in die Alterspension wird meist ein festes Alter angenommen, siehe z.B. Ettl W. und Pagler F. (1989), Heubeck G. und Fischer K. (1959), Heubeck K. (1983), Heubeck K. (1998), Liebmann F.G. (1974), Meewes W. und Meissner W. (1936).

Auch wenn z.B. bei Pensionsverträgen zunächst ein festes Alter für den Übergang in die Alterspension vorgesehen ist, so ist der tatsächliche Antritt der Alterspension oft von unabwägbaren Ereignissen und/oder gesetzlichen Regelungen abhängig. Es gibt eine Vielzahl von Regelungen für den Übergang in die Alterspension vor dem „gesetzlichen Pensionsantrittsalter“. In den Rechnungsgrundlagen für die Pensionsversicherung wird dies bei den Invalidisierungswahrscheinlichkeiten berücksichtigt. Dabei ist eigentlich zwischen der Invalidisierung im engeren und im weiteren Sinn zu unterscheiden.

Unter einer Invalidisierung im engeren Sinn soll hier eine Invalidisierung wegen eines Unfalles oder einer Krankheit verstanden werden. Über die Wahrscheinlichkeiten für eine Invalidisierung im engeren Sinn gibt es zahlreiche Untersuchungen und Arbeiten.

Der Verlauf der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten lässt in den meisten Rechnungsgrundlagen einen exponentiellen Verlauf erkennen; siehe Abbildungen in Liebmann, F.G. (2003) S 34 und S 35.

Unter einer Invalidisierung im weiteren Sinne, sollen hier auch Übergänge in die Frühpension bzw. in die vorzeitige Alterspension etc. verstanden werden.

Es gibt zahlreiche Untersuchungen, die zeigen, dass die Invalidisierung sehr stark von wirtschaftlichen Gegebenheiten abhängig ist, vgl. z.B. Heubeck G. und Fischer K. (1959)

Bei den Rechnungsgrundlagen Liebmann F.G. (2003) wurde der exponentielle Verlauf für die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten im engeren Sinn durch die Annahme eines exponentiellen Verlaufes der Invalidisierungsintensität approximiert.

Zur Berücksichtigung der Invalidisierung im weiteren Sinn wurden die Intensitäten durch einen Zuschlag erhöht, der in den Altern 50 bis 60 von 20 % auf 100 % ansteigt.

In Erweiterung dieser Arbeit wird nun ein Modell vorgestellt, bei dem auch beim Übergang in die Alterspension mit Eintrittswahrscheinlichkeiten gerechnet wird.

Die Statistiken über die Pensionszugänge sind bei der Ermittlung von Übergangswahrscheinlichkeiten nur bedingt nützlich, da zwar die Zahl der Pensionszugänge für die einzelnen Kalenderjahre bekannt ist, nicht jedoch die Anzahl aller Bestände aus denen sich die Pensionisten rekrutieren. Die Anzahl der Aktiven ist hierfür jedenfalls nicht ausreichend, da sich Pensionisten aus den verschiedensten Personengruppen rekrutieren (z.B. Arbeitslose, mit und ohne Meldung der

Arbeitslosigkeit; Bezieher von Hinterbliebenenpensionen; Personen, die sich in Karenz befinden; oder Personen, die im Ausland leben, etc.).

Die vorhandenen Statistiken müssen durch plausible Schätzungen und Überlegungen ergänzt werden. Dies gilt jedoch auch für den Fall, dass die Frühpensionierungen bei den Zugängen zu den Invaliditätspensionisten berücksichtigt werden. Da sich die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten im engeren Sinn im Laufe der Kalenderjahre wesentlich weniger verändern, als die Übergänge in die Alterspension, erscheint es auch aus diesem Grunde sinnvoll, wenn für letztere eine eigene Übergangswahrscheinlichkeit eingeführt wird. Damit kann z.B. die Verschiebung der Übergänge in die Alterspension zu höheren Altern berücksichtigt werden.

Die Übergangintensität zur Beschreibung des Überganges in die Alterspension wird im Folgenden kurz A-Pensionierungs-Intensität genannt.

## Übergangsintensitäten und Übergangswahrscheinlichkeiten (geschätzt) bei variablem Pensionsantrittsalter

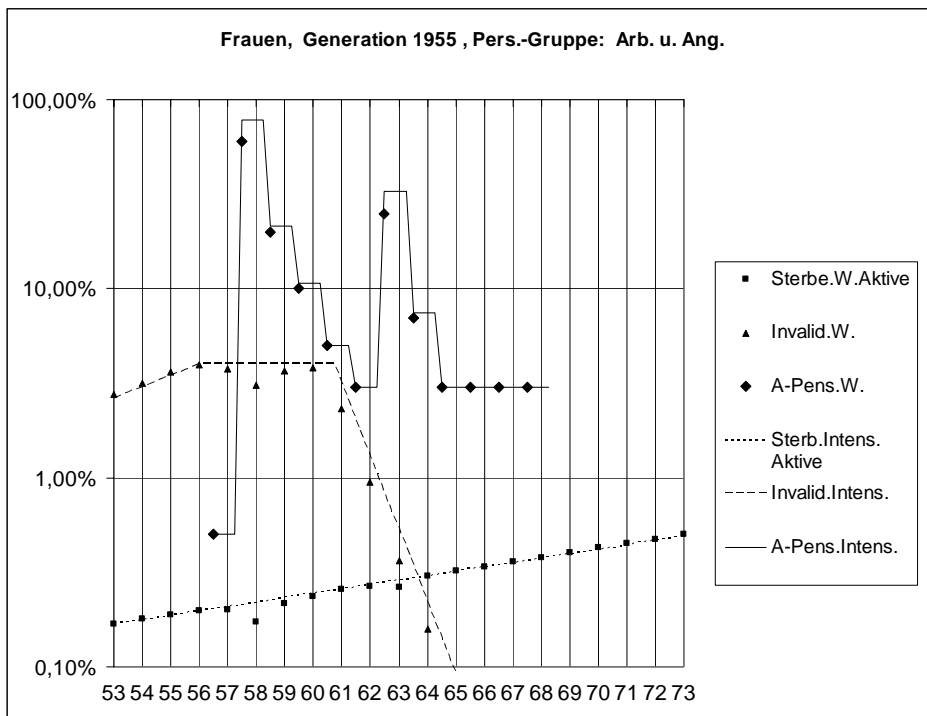


Abbildung 1 F

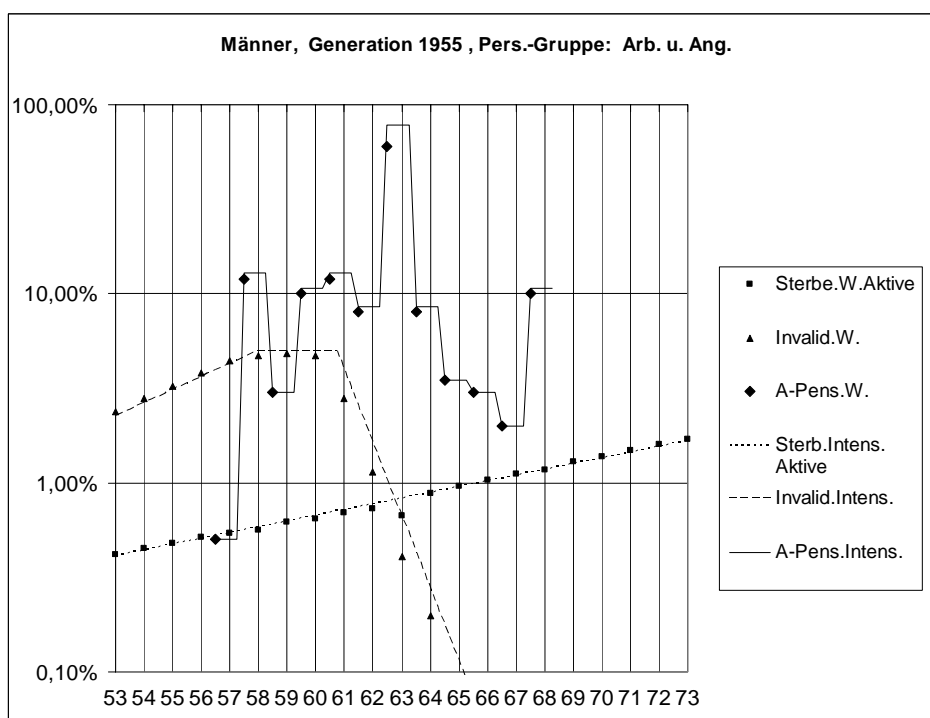


Abbildung 1 M

Bei den Übergängen in die Alterspension handelt es sich um sehr große Wahrscheinlichkeiten (50 % und mehr). Bei derart hohen Wahrscheinlichkeiten kommt es bereits zu einer starken Auswirkung auf die anderen Übergangswahrscheinlichkeiten, die nicht mehr vernachlässigt werden kann. Vergleiche z.B. Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A. and Nesbitt C.J. (1986) Chapter 9 „Multiple Decrement Models, Example 9.3.

Bei der Berechnung von einjährigen Abgangswahrscheinlichkeiten wird die Anzahl der Abgänge den Beständen am Anfang des Beobachtungsjahres gegenübergestellt. Wenn nun bei einer der Abgangswahrscheinlichkeiten hohe Werte beobachtet werden (etwa mehr als 20 %), so führt dies dazu, dass weniger Abgänge aufgrund der anderen Ursachen zu beobachten sind, da ja während des Beobachtungsjahres deutlich weniger Personen diesen anderen Abgangsursachen ausgesetzt sind. Am Ende dieser Arbeit wird auf den Einfluss des variablen Pensionsantrittsalters auf die Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven und die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten eingegangen.

Wird die Ausscheideordnung nicht mit Wahrscheinlichkeiten berechnet, sondern mit Hilfe eines Differentialgleichungssystem mit Übergangsintensitäten aufgebaut, so bekommt man die gegenseitigen Abhängigkeiten der Wahrscheinlichkeiten in den Griff.

Die folgenden sechs Abbildungen zeigen die Entwicklung der Bestände der Aktiven der Invaliditätspensionisten und der Alterspensionisten, für jeweils drei Jahrgänge und für die folgenden beiden Ausscheideordnungen:

- Ausscheideordnung mit dem festen Pensionsantrittsalter 60 (bzw. 65) und mit Invaliditätswahrscheinlichkeiten mit Zuschlag zur Berücksichtigung von Frühpensionisten
- Ausscheideordnung mit dem variablen Pensionsantrittsalter wobei mit Invaliditätswahrscheinlichkeiten ohne Zuschlag zur Berücksichtigung von Frühpensionisten und mit Alterspensionierungswahrscheinlichkeiten gerechnet wird.

Bei der Abschätzung der Alterspensionierungswahrscheinlichkeiten wurde berücksichtigt, dass das Pensionsantrittsalter in den nächsten Jahren ansteigen wird.

Die Abbildungen zeigen deutlich wie sich die Übergänge in die Alterspension in Abhängigkeit vom Jahrgang verändern.

## Entwicklung der Bestände bei verschiedenen Ausscheideordnungen (AO)

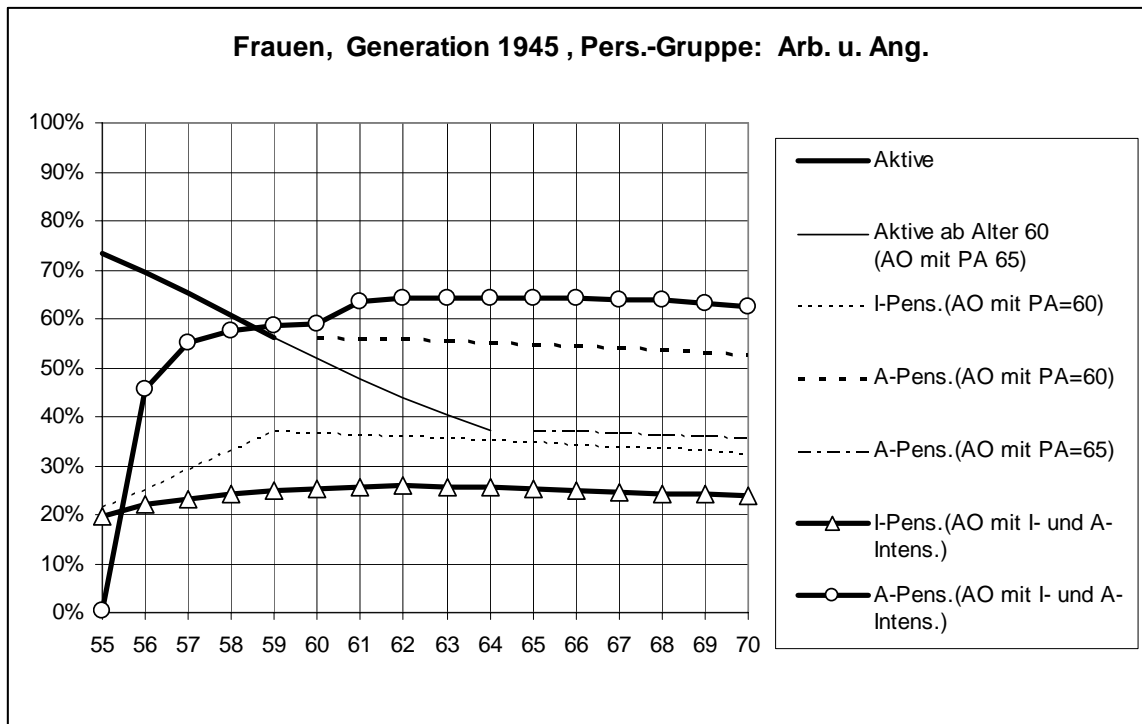


Abbildung 2 F

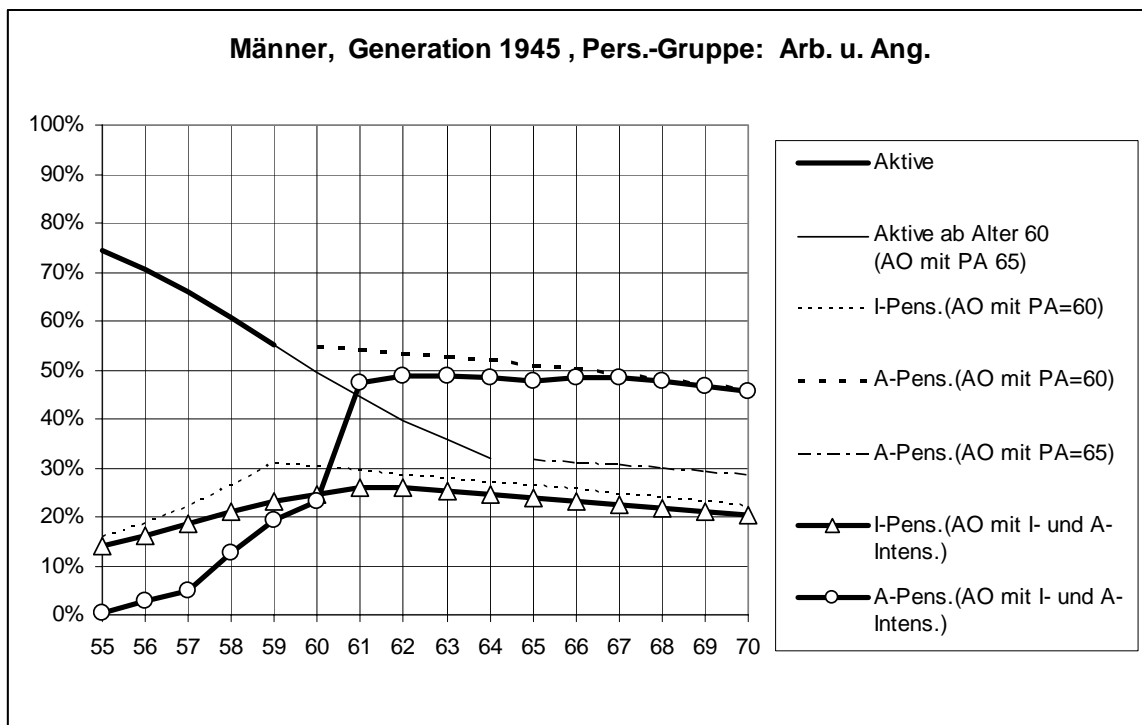


Abbildung 2 M

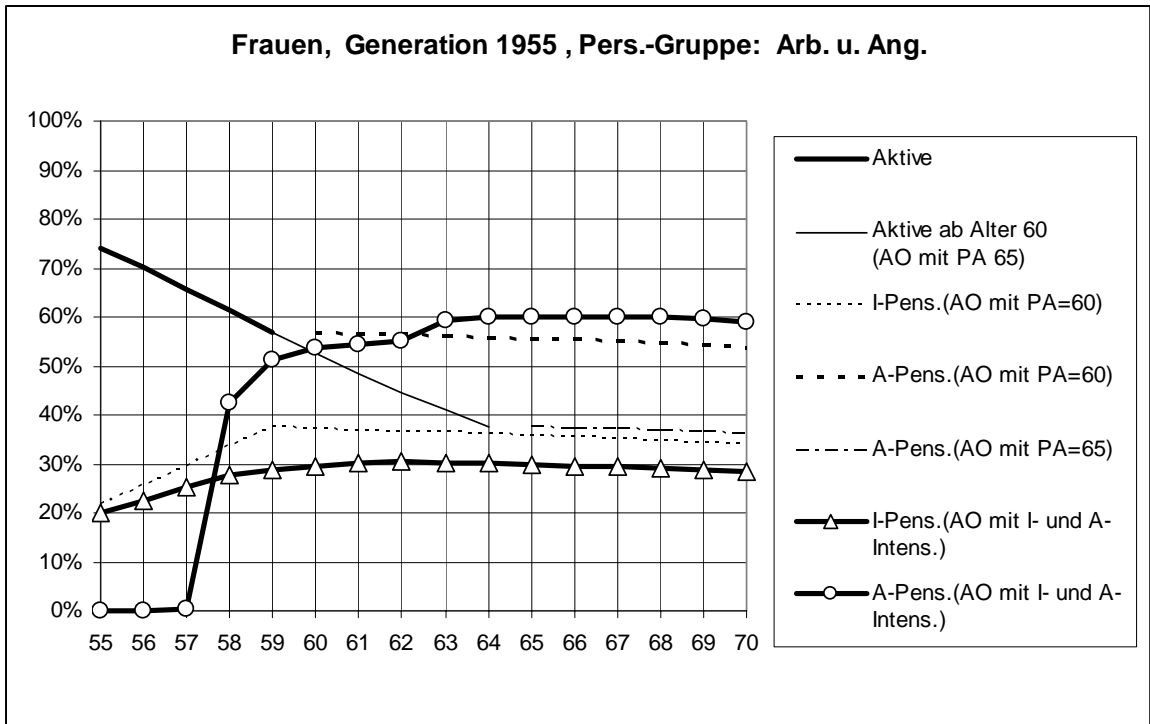


Abbildung 3 F

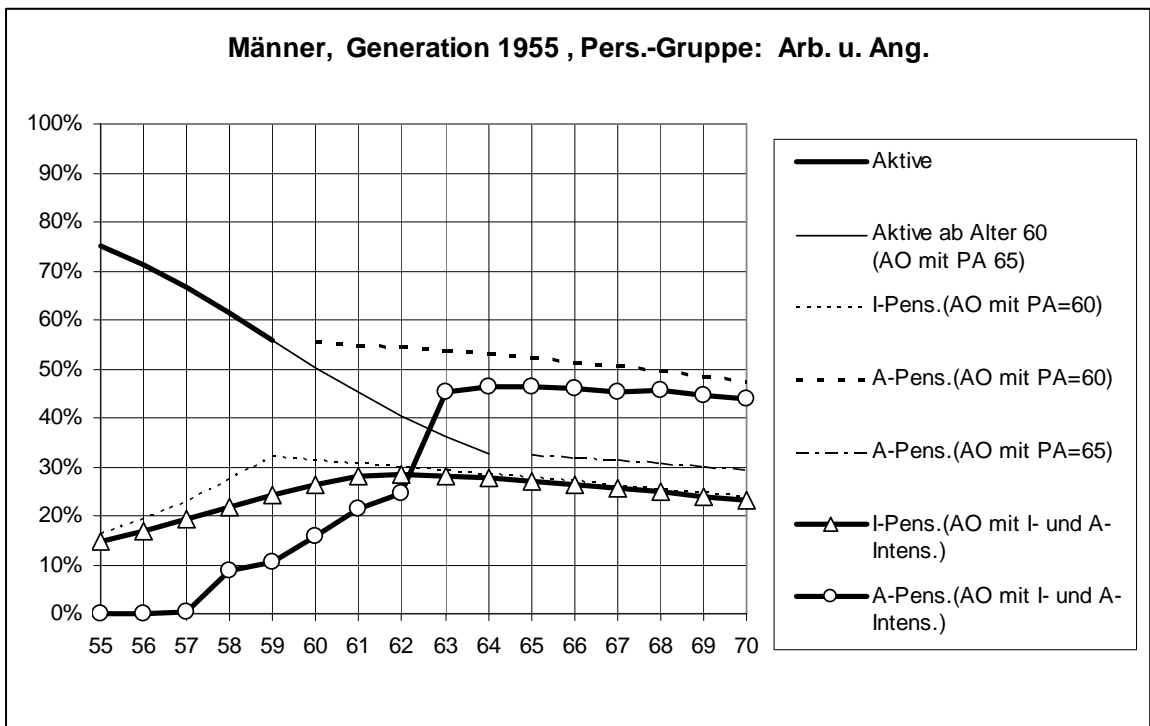


Abbildung 3 M

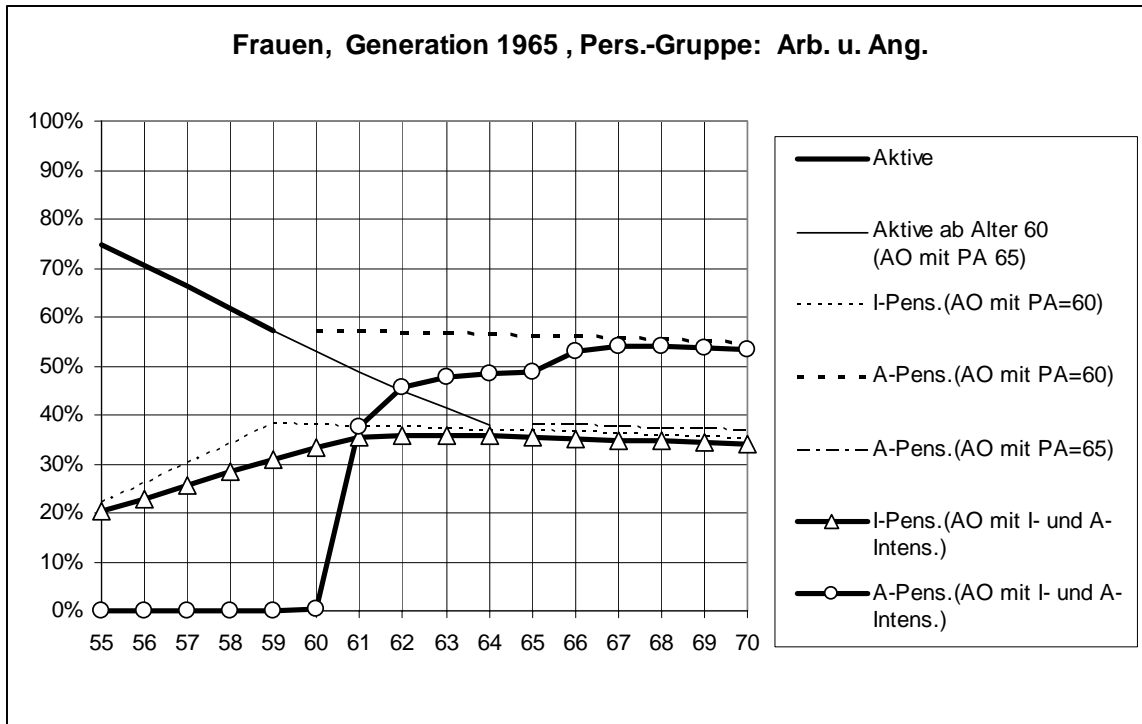


Abbildung 4 F

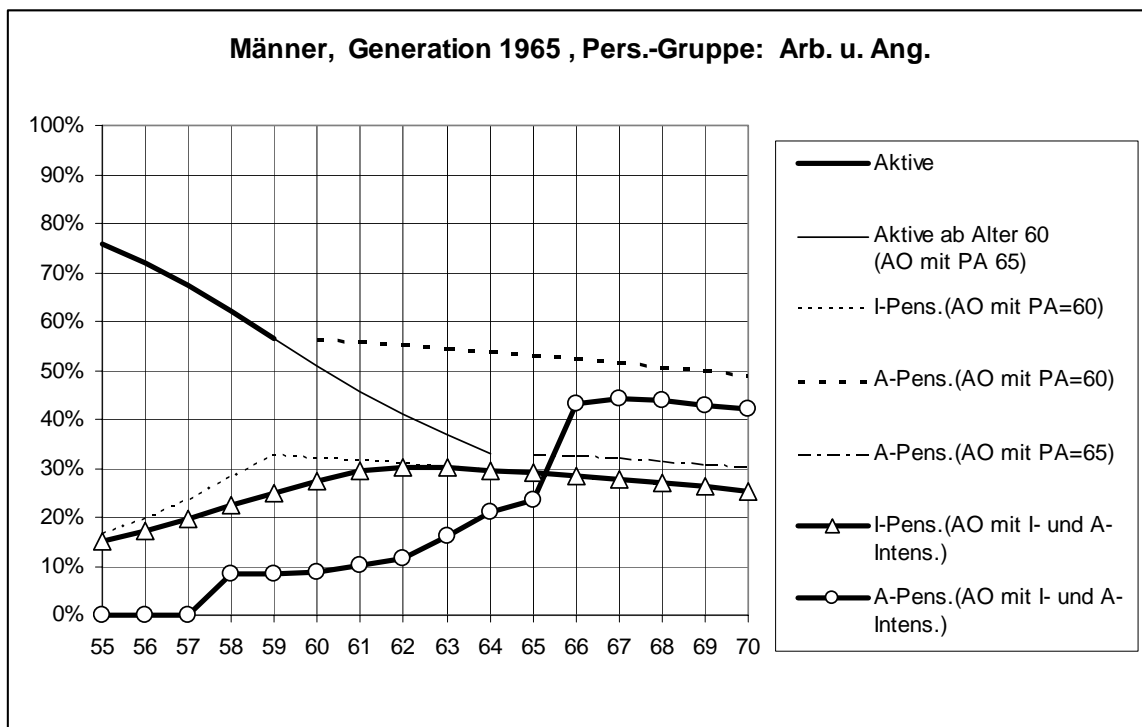


Abbildung 4 M



## **Einfluss des variablen Pensionsantrittsalters auf die Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven und die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten**

Wie bereits erwähnt, wirken sich die hohen Wahrscheinlichkeiten für den Übergang in die Alterspension auf die anderen Ausscheidewahrscheinlichkeiten aus.

Bei der Ermittlung von Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven und von Invalidisierungswahrscheinlichkeiten kann dies (in dem Altersbereich, in dem Übergänge in die Alterspension auftreten) beobachtet werden; z.B. war dies bei der Ermittlung der rohen Wahrscheinlichkeiten bei der Untersuchung der Versichertenbestände der österreichischen Sozialversicherung (Liebmann, F.G. (1974) zu erkennen.

Um diese Effekte quantifizieren zu können, wurde die Ausscheideordnung mit Hilfe des zugeordneten Differentialgleichungssystems (vgl. Liebmann, F.G. (1989) berechnet. Hierzu ist es erforderlich die Übergangintensitäten zu ermitteln.

Im Bereich, in dem Alterspensionierungen auftreten, kommt es zu einer Verminderung der Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven, die einer Altersverschiebung von bis zu drei Jahren entspricht.

Ebenso kommt es zu einer sehr deutlichen Verminderung der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten. Der bis zu diesem Altersbereich annähernd exponentielle Verlauf dieser Wahrscheinlichkeiten wird deutlich unterbrochen.

Dieser Effekt ist auch bei Ausscheideordnungen mit festem Pensionsantrittsaltern zu berücksichtigen, da ja die Übergänge in die Alterspension, wie die Pensionsstatistiken zeigen, auf mehrere Jahre verteilt sind.

Die folgenden Diagramme zeigen die Auswirkungen der hohen Alterspensionierungswahrscheinlichkeiten auf die Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven und auf die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten.

## Einjährige Sterbewahrscheinlichkeiten (auch für vierteljährige Alter) und Sterbeintensitäten der Aktiven, bei variablem Pensions-Antrittsalter

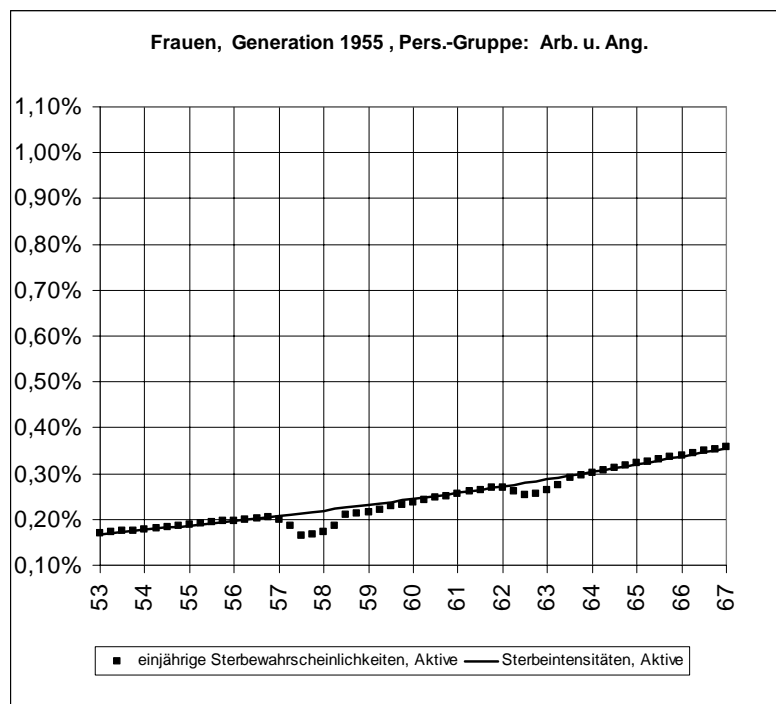


Abbildung 3 F

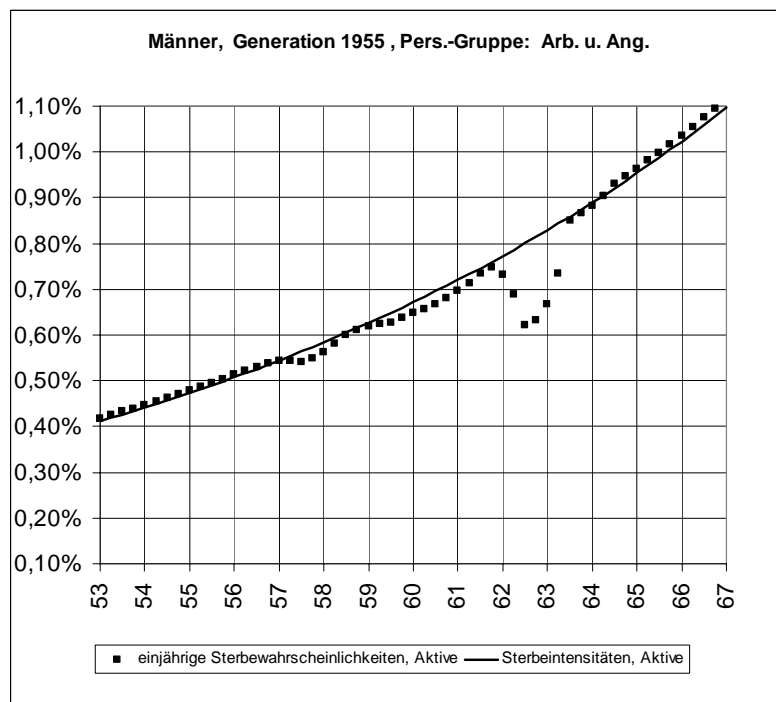


Abbildung 3 M

## Einjährige Invalidisierungswahrscheinlichkeiten (auch für vierteljährige Alter) und Invalidisierungsintensitäten bei variablem Pensionsaltersalter

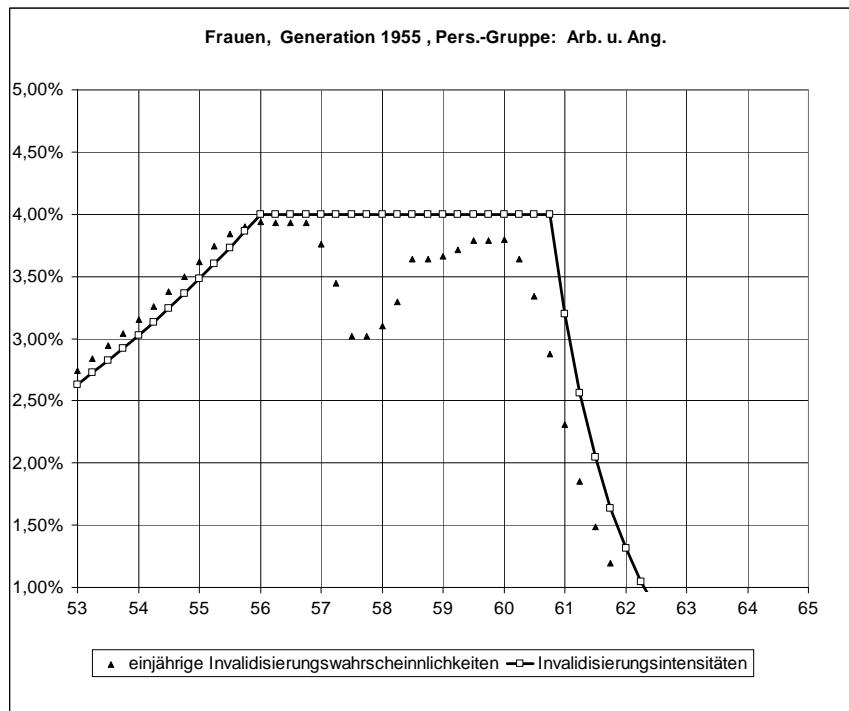


Abbildung 4 F

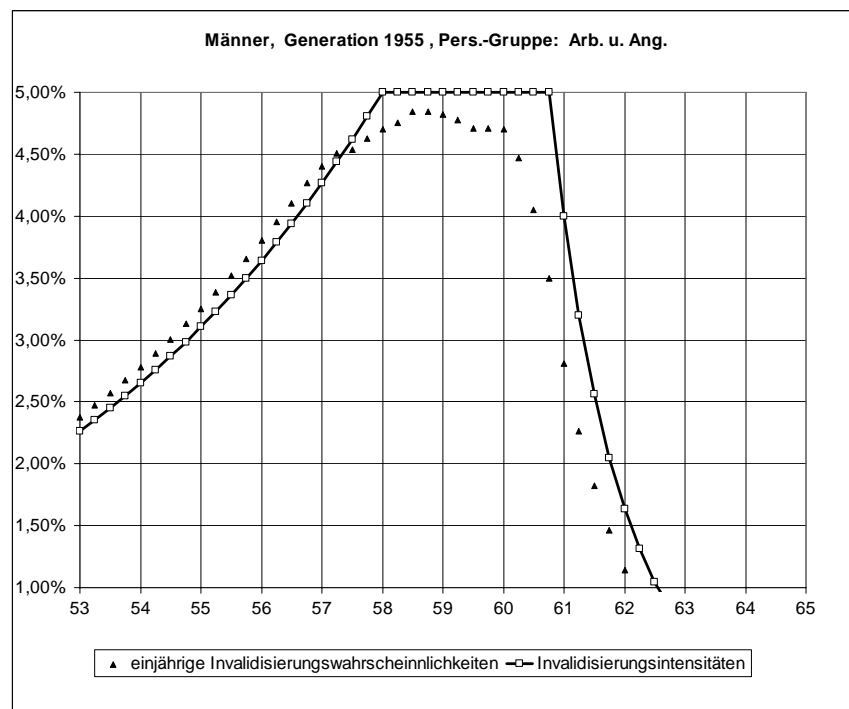


Abbildung 4 M

## Literaturangaben

- Bundesministerium für Soziale Sicherheit und Generationen, Bericht über die soziale Lage, Analysen und Ressortaktivitäten; Einkommen, Soziale Sicherung, Generationen, Gesundheit (1999)
- Bundesministerium für Soziale Sicherheit und Generationen, Bericht über die soziale Lage, Datenband; Einkommen, Gesundheit (1999)
- Artmann H. und Pfaffenberger E. (1907): "Zur Mathematik der Pensionsversicherung", Verlag von Gustav Fischer, Jena
- Bomsdorf E. (1993): "Generationensterbetafel Geburtsjahrgang 1987 und Periodensterbetafel 1986/88", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXI, Heft 2
- Böhmer P. E., (1914): "Die Grundlagen der Theorie der Invaliditätsversicherung", Jahrbuch der Versicherungsmathematik 1914, Verlag: Deutsche Versicherungs-Presse, Berlin
- Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A., and Nesbitt C. J. (1986): "Actuarial Mathematics" The Society of Actuaries, U.S.A:
- Chuard M. et Chuard P. 1992: "La réactivité des invalides dans les rentes futures d'invalidité", Mitteilungen der Schweizerischen Versicherungsmathematiker, Heft 1, 1992
- Chuard P. (1993): "Modèles mathématiques pour actifs et invalides", Mitteilungen der Schweizerischen Versicherungsmathematiker, Heft 2, 1993
- Ettl W. und Pagler F. (1989): "Rechnungsgrundlagen für die Pensionsversicherung", Verlag: Verband der wissenschaftlichen Gesellschaften Österreichs, Wien
- Gerber H. U. (1995): "Life Insurance Mathematics", Springer Verlag, Swiss Association of Actuaries, Zürich
- Halley E. (1693): "An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Drawn from Varios Tables of Birth and Funerals at the City of Breslau", <http://www.pierre-marteau.com/editions/1693-mortality.html>, Pierre Marteau's Publishing House, Cologne Virtual Publisher for over 350 Years, <http://www.pierre-marteau.com>,
- Heubeck G. und Fischer K. (1959): Richttafeln für die Pensionsversicherung, René Fischer Verlag, Weissenburg/Bayern
- Heubeck K. (1983): "Richttafeln", Verlag: Heubeck-Richttafeln-GmbH, Köln
- Heubeck K. (1998): "Richttafeln 1998", Verlag Heubeck-Richttafeln-GmbH, Köln
- Jörgen S. (1996): "Zur Anwendung der Tafeln EROM/F G 1950", Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs, Heft 8, März 1996
- Jörgen S., Liebmann F. G., Pagler F. und Schachermayer W. (1997): "Herleitung der Sterbetafel AVÖ 1996R für Rentenversicherungen", Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs, Heft 9, November 1997

- Karup J. (1875): "Die neue Theorie der Invaliditäts- und Activitätsberechnung" Rundschau der Versicherungen, Verlag der Rundschau-Expedition, Leipzig, London
- Kolster N., Loebus H. und Mörtlbauer W. (1998): "Neue Rechnungsgrundlagen für die Berufsunfähigkeitsversicherung DAV 1997", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXIII, Heft 4
- Lambrechts K. (1996): "Belgische Sterftafels: van vorige tot volgende eeuw (Belgian mortality table: from last till next century)", faculteit economischen en toegepaste economische wetenschappen, katholieke universiteit Leuven
- Lexis W. (1877): "Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft" Fr. Wagner'sche Buchhandlung Freiburg i.B.
- Liebmann F. G. (1974): "Demographische Entwicklung der Versichertenbestände bis 1990", Schriftenreihe des Forschungsinstitutes für Soziale Sicherheit beim Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger, Heft 1, 1974
- Liebmann F. G. (1989): "Ein kontinuierliches Modell in der Pensionsversicherungsmathematik", Mitteilungen der Schweizerischen Versicherungsmathematiker, Heft 1, 1989
- Liebmann F. G. (1996): "Extrapolation von Sterbetafeln für die Pensionsversicherung", Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs, Heft 8, März 1996
- Liebmann F. G. (1999): "Generationentafel für die Pensionsversicherung aufbauend auf einer Ausscheideordnung mit mehreren Ausscheideursachen", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXIV, Heft 2
- Liebmann F. G. (2003): "Rechnungsgrundlagen für die Pensionsversicherung AVÖ 1999 P", Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs, Heft 12, Juli 2003
- Lindmayr B. und Musger H. (1977): "Tabellen zur Berechnung von Rückstellungen für Pensionsverpflichtungen nach der österreichischen allgemeinen Sterbetafel 1970/72", Selbstverlag der Verfasser, 8101 Gratkorn, Am Hartboden 477
- Loebus H. (1994): "Bestimmung einer angemessenen Sterbetafel für Lebensversicherungen", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXI, Heft 4
- Maeder P. (1995): "La construction des tables de mortalité du tarif collectif 1995 de l'UPAV" Mitteilungen der Schweizerischen Versicherungsmathematiker, Heft 2, 1995
- Masciotti R. (1963): "La matematica actuariale analitica", Selbstverlag des Verfassers, Via Trionfale 85, Roma, Italien
- Meewes W. und Meissner W. (1936): "Rechnungsgrundlagen für Pensionsversicherung" Verlag Neumanns Zeitschrift für Versicherungswesen, Berlin, 1936
- Milbrodt H. und Helbig M. (1999): "Mathematische Methoden der Personenversicherung", Walter de Gruyter, Berlin

- Müller N. E. (1973): "Mathematik der Pensionsversicherung", Verfasser-Verlag, Baldham, Alte Poststr. 6 A, Deutschland
- Neuburger E. (1974): "Notiz über einen rechnerangepassten Algorithmus zu Berechnung von Prämien und Reserven" Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XI, Heft 4
- Neuburger E. (1990): "Unabhängigkeit von Rentenanwartschaftsbarwerten von der Zahlungsweise" Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XIX, Heft 3
- Neuburger E. (1993): "Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen" Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 25
- Neuburger E. (1999): "Bemerkungen zum Formelwerk der Richttafeln 1998" Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXIV, Heft 1
- Nöbauer W. und Timischl W. (1979): "Mathematische Modelle in der Biologie" ISBN 3-528-03068-2, Veitweg, Wiesbaden
- Oster G. (1998): „Entwicklungen und Trends in der Berufsunfähigkeits-Zusatzversicherung in Deutschland, Österreich und der Schweiz“ Dissertation an der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck
- Peter H. und Trippel J. R. (1993): "Auswertungen und Vergleich der Sterblichkeit bei den Einzelkapitalversicherungen der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt in den Jahren 1981- 990, Mitteilungen der Schweizerischen Versicherungsmathematiker, Heft 1 1993
- Reichel G. (1983): "Gibt es "unabhängige" Verbleibswahrscheinlichkeiten in der Pensionsversicherungsmathematik? Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Oktober 1983
- Schaaf B., Heller U. und Papst W. (1996): "Auswirkungen der neuen Rechnungsgrundlagen für Rentenversicherung und Bewertung", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXII, Heft 4
- Schaertlin G. (1907): "Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung" Bern, Schweizerische Lebensversicherungs- und Rentenanstalt
- Schmithals B. und Schütz E. U. (1995): "Herleitung der DAV-Sterbetafel 1994 R für Rentenversicherungen", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band XXII, Heft 1
- Winnacker und Küchler: (1984) "Chemische Technologie", Carl Hanser Verlag, München, Wien
- Wüthrich M. (1996): "Herleitung von Austrittswahrscheinlichkeiten aus Vorsorgeeinrichtungen" Mitteilungen der Schweizerischen Versicherungsmathematiker, Heft 2, 1996
- Wolff K.-H. (1959): „Die zeitliche Änderung der Sterblichkeit und ihre Berücksichtigung in der Pensionsversicherung“, 2. Internationale Konferenz der

Versicherungsmathematiker und Statistiker der Sozialen Sicherheit, Rom,  
Oktober 1959

Wolff K.-H. (1970): „Versicherungsmathematik“, Springer-Verlag, Wien - New York

Wolff K.-H. (1973): „Zur Frage der zeitlichen Veränderung der Sterbehäufigkeiten“,  
Mitteilungsblatt der österreichischen Gesellschaft für Statistik und Informatik,  
3. Jahrgang, Juli 1973, Nr. 9

Wolff K.-H., Juch J., Liebmann F. G. und Popper L. (1975): „Demographische und  
medizinische Untersuchungen in Österreich; Institut für  
Versicherungsmathematik, Technische Universität Wien

Franz G. Liebmann ist Universitätsdozent an der Technischen Universität Wien, Institut für  
Wirtschaftsmathematik, Forschungsgruppe Finanz- und Versicherungsmathematik und  
war Aktuar in der österreichischen Versicherungsaufsicht im Bundesministerium für  
Finanzen. franz.liebmann@tuwien.ac.at